Самаров Е.К.

Samarov E.K.

кандидат технических наук,
декан факультета инфокоммуникационных систем и технологий,
Технологический университет,
г. Королев, Московская область, Российская Федерация

УДК 004.932

DOI:

СИНТЕЗ АЛГОРИТМА ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДУЛЯЦИИ ШУМА В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Задачи цифровой обработки изображений являются важными составляющими огромного количества направлений современной прикладной науки. Примерами таких задач являются хранение, передача, воспроизведение и анализ фотографических образов, сделанных на медицинском оборудовании, картографических снимков, авиакосмических изображений, различных фотографий военной направленности и многие другие. При этом данные, получаемые с любого регистрирующего устройства, подвергаются обработке программно-аппаратными средствами в целях минимизации их объема при допустимом уровне потери качества в зависимости от функционального назначения. В большинстве случаев возникает потребность в подавлении шума, обусловленная тем, что, во-первых, он является избыточной информацией, увеличивающей объем изображения, а, во-вторых, может уменьшать полезные свойства изображения или даже искажать результаты измерений.

В настоящей статье разработан и предлагается алгоритм оптимальной линейной модуляции для подавления шума в цифровой обработке изображений. Она включает в себя описание дискретного двумерного косинусного преобразования, применяемого при обработке цифровых изображений в соответствии со стандартом сжатия JPEG, использование частотных и пространственных фильтров, осуществление фильтрации по окрестностям элементов пространственной области и предложенную модель подавления шума при помощи оптимальной линейной модуляции по окрестностям. Разработанный алгоритм подавления шума может быть применен не только к изображениям в стандарте JPEG, но и к изображениям в стандартах ICER и JPEG2000, в которых используются более совершенные методы сжатия цифровых изображений, основанные уже не на дискретных преобразованиях Фурье, а на современных вейвлет-преобразованиях.

Настоящая статья имеет существенное практическое значение. В работе сделан упор именно на математических аспектах высокоэффективных алгоритмов для компьютерной цифровой обработки изображений, цифровой фильтрации и подавления шума, программно-аппаратная реализация которых позволит существенно увеличить скорость, точность и степень сжатия изображений.

Ключевые слова: цифровые изображения, цифровая обработка изображений, дискретное преобразование Фурье, степень сжатия изображений, стандарт сжатия изображений, частотный фильтр, пространственный фильтр, цифровая фильтрация, линейная модуляция, подавление шума.

SYNTHESIS OF THE ALGORITHM FOR OPTIMAL LINEAR NOISE MODULATION IN DIGITAL IMAGE PROCESSING

The tasks for digital image processing are important part of a huge number of areas in modern applied science. Examples of such tasks are the storage, transfer, rendition and analysis of photographic images made by medical equipment, cartographic images, aerospace images, various photos for military purposes, and many others. At the same time, the data obtained from any recording device are processed by software and hardware in order to minimize the volume with an acceptable level of quality loss depending on the functional purpose. In most cases, there is a need to suppress noise, due to the fact that, firstly, it is excessive information that increases the volume of the image, and, secondly, it can reduce the useful properties of the image or even distort the measurement results.

In the article we offer designed algorithm of optimal linear modulation for noise suppression in digital image processing. It includes the description of the discrete two-dimensional cosine transformation used in digital images processing in accordance with the JPEG compression standard, frequency and spatial filters, the implementation of filtration in the neighborhood of the elements of the spatial domain and the designed model of noise suppression using optimal linear modulation in the neighborhood. The developed noise suppression algorithm can be applied not only to images in the JPEG standard used discrete Fourier transformations, but also to images in the ICER and JPEG 2000 standards, which use more advanced methods of digital image compression based on modern wavelet transforms.

This article has essential practical value. It focuses on the mathematical aspects of highly efficient algorithms for computer digital image processing, digital filtering and noise suppression, software and hardware implementation of which will allow significantly increase the rate, accuracy and compression of images.

Key words: digital images, digital image processing, discrete Fourier transformation, compression ratio, compression standard, frequency filter, spatial filter, digital filtration, linear modulation, noise suppression.

1. Дискретное двумерное преобразование Фурье

Световые датчики регистрирующего прибора расположены на светочувствительной матрице с шагом h_1 по оси абсцисс и с шагом h_2 по оси ординат. Если двумерный аналоговый сигнал $z(x, y)$ представляет собой яркость монохромного цвета, то его дискретизация в форме прямоугольника с целочисленными сторонами X и Y определяется по формуле

$$\tilde{z}(x, y) = \sum_{n=0}^{X-1} \sum_{m=0}^{Y-1} z(x, y) \delta(x_0 + nh_1, y_0 + mh_2),$$

где символом δ обозначена обобщенная двумерная функция «Дельта – функция Дирака». Преобразованием Фурье дискретного сигнала $\tilde{z}(x, y)$ является аналоговый сигнал

$\tilde{Z}(f_1, f_2)$, вычисляемый по формулам [1]:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(f_1, f_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{z}(x, y) e^{-i2\pi f_1 x} e^{-i2\pi f_2 y} dx dy = \\ &= \sum_{n=0}^{X-1} \sum_{m=0}^{Y-1} z(x_0 + nh_1, y_0 + mh_2) e^{-i2\pi(f_1 nh_1 + f_2 mh_2)} = \\ &= \sum_{n=0}^{X-1} \sum_{m=0}^{Y-1} z_{n,m} e^{-i2\pi(f_1 nh_1 + f_2 mh_2)}, \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$z_{n,m} = z(x_0 + nh_1, y_0 + mh_2),$$

$$n = 0, 1, \dots, X-1; \quad m = 0, 1, \dots, Y-1.$$

Значения аналогового сигнала $\tilde{Z}(f_1, f_2)$, на частотах

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{k_1}{Xh_1}, & k_1 &= 0, 1, \dots, X-1, \\ f_2 &= \frac{k_2}{Yh_2}, & k_2 &= 0, 1, \dots, Y-1 \end{aligned}$$

определяются по формуле

$$\tilde{z}\left(\frac{k_1}{Xh_1}, \frac{k_2}{Yh_2}\right) = \sum_{n=0}^{X-1} \sum_{m=0}^{Y-1} z_{n,m} e^{-i2\pi(k_1 n/X + k_2 m/Y)},$$

и если ввести обозначение

$$\tilde{z}_{k_1, k_2} = \tilde{z}\left(\frac{k_1}{Xh_1}, \frac{k_2}{Yh_2}\right),$$

то выражение

$$\tilde{z}_{k_1, k_2} = \sum_{n=0}^{X-1} \sum_{m=0}^{Y-1} z_{n,m} e^{-i2\pi(k_1 n/X + k_2 m/Y)} \quad (1)$$

и будет дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) цифрового изображения $\{z_{n,m}\}$.

Обратное ДПФ определяется по формуле:

$$z_{n,m} = \frac{1}{XY} \sum_{k_1=0}^{X-1} \sum_{k_2=0}^{Y-1} \tilde{z}_{k_1, k_2} e^{i2\pi(k_1 n/X + k_2 m/Y)} \quad (2)$$

Для доказательства формулы (2) достаточно подставить в неё выражение (1) и воспользоваться формулой Эйлера в теории комплексных чисел, а также формулой суммы первых членов геометрической прогрессии.

Для ДПФ справедлива формула Парсеваля – Ляпунова:

$$\sum_{k_1=0}^{X-1} \sum_{k_2=0}^{Y-1} |\tilde{z}_{k_1, k_2}|^2 = \frac{1}{XY} \sum_{n=0}^{X-1} \sum_{m=0}^{Y-1} |z_{n,m}|^2, \quad (3)$$

устанавливающая связь между нормой функции в пространстве L_2 и суммой квадратов модулей её коэффициентов Фурье. Левую часть формулы Парсеваля – Ляпунова называют энергетическим спектром.

2. Дискретное двумерное косинусное преобразование Фурье

В стандарте JPEG используется дискретное косинусное преобразование Фурье (дискретное КПФ), формулы, которого можно получить, если, воспользовавшись формулой Эйлера, заменить в формулах (1, 2, 3) комплексную экспоненту на её действительную часть.

Наиболее удобным и широко распространенным является прямое дискретное КПФ в виде

$$\tilde{z}_{k_1, k_2} = \sum_{n=0}^{X-1} \sum_{m=0}^{Y-1} z_{n,m} \cos\left(k_1(n+0,5)/X\right) \cdot \cos\left(k_2(m+0,5)/Y\right),$$

где $n, k_1 = 0, 1, \dots, X-1$; $m, k_2 = 0, 1, \dots, Y-1$.

Обратное дискретное КПФ определяется по формуле:

$$z_{n,m} = \frac{1}{XY} \sum_{k_1=0}^{X-1} \sum_{k_2=0}^{Y-1} \tilde{z}_{k_1, k_2} \cdot \cos\left(k_1(n+0,5)/X\right) \cos\left(k_2(m+0,5)/Y\right)$$

В стандарте JPEG используется вариант алгоритма дискретного КПФ, который называют алгоритмом быстрого косинусного преобразования Фурье. Быстрое дискретное КПФ позволяет осуществлять дискретное КПФ с повышенной скоростью.

Кроме косинусного преобразования Фурье в различных научных и прикладных исследованиях применяется также и синусное преобразование Фурье. Формулы для синусного преобразования Фурье можно получить, если, воспользовавшись формулой Эйлера, заменить в формулах (1, 2, 3) комплексную экспоненту на её мнимую часть. Однако в практических приложениях синусное преобразование Фурье встречается гораздо реже, чем дискретное КПФ. Это связано с тем, что производная функции косинус равна 0 в точках $k_1=0$ и $k_2=0$, что очень удобно для продолжения образа и прообраза Фурье по симметрии за точки $k_1=0$ и $k_2=0$.

К сожалению, использование преобразований Фурье в цифровой обработке изображений ограничено, поскольку в силу принципа неопределенности Гейзенберга повышение точности определения значений функции приводит к понижению точности определения значений её преобразования Фурье и наоборот. Более высокая точность, степень сжатия, скорость и качество цифровой обработки изображений достигается за счет применения вместо преобразований Фурье современного аппарата вейвлет-преобразований. В частности, вейвлет-преобразования используются в стандарте JPEG 2000 и программном пакете ICER [2]. Однако стоит отметить, что в силу ряда причин, связанных, в основном, с высокой сложностью применяемых в стандарте JPEG2000 методов цифровой обработки изображений, стандарт JPEG2000 так и не приобрел такого широкого распространения и популярности, как стандарт JPEG [3]. Даже такие известные интер-

нет-браузеры, как Yandex, Google Chrome, Edge и ряд других, не открывают файлы, записанные в формате jp2, т.е. в формате JPEG2000. То же относится и к программному пакету ICER.

3. Частотные фильтры

Вернемся к формуле (1), выражающей дискретный двумерный массив – образ Фурье $\tilde{Z}_{k_1, k_2}$ с размерами:

$$k_1 = 0, 1, \dots, X-1; \quad k_2 = 0, 1, \dots, Y-1 \quad (4)$$

через прообраз Фурье – цифровое изображение $Z_{n, m}$ с теми же размерами:

$$n = 0, 1, \dots, X-1; \quad m = 0, 1, \dots, Y-1 \quad (5)$$

Двумерный числовой массив H_{k_1, k_2} называют линейным частотным фильтром (линейной частотной фильтр-функцией), а двумерный числовой массив $F_{n, m}$ называют результатом линейной частотной фильтрации цифрового изображения $Z_{n, m}$, если выполнено соотношение:

$$F_{n, m} = \frac{1}{XY} \sum_{k_1=0}^{X-1} \sum_{k_2=0}^{Y-1} \tilde{Z}_{k_1, k_2} H_{k_1, k_2} \cdot e^{-i2\pi(k_1 n/X + k_2 m/Y)}, \quad (6)$$

В соответствии с формулой (6), результат линейной частотной фильтрации $F_{n, m}$ представляет собой обратное ДПФ функции $\tilde{Z}_{k_1, k_2} H_{k_1, k_2}$, которая получена из образа Фурье $\tilde{Z}_{k_1, k_2}$ цифрового изображения $Z_{n, m}$ при помощи умножения на линейную частотную фильтр-функцию H_{k_1, k_2} .

В случае, когда результатом частотной фильтрации цифрового изображения $Z_{n, m}$ будет двумерный числовой массив $F_{n, m}$ с размерами (5), определяемый по формуле

$$F_{n, m} = \frac{1}{XY} \sum_{k_1=0}^{X-1} \sum_{k_2=0}^{Y-1} H(\tilde{Z}_{k_1, k_2}) \cdot e^{-i2\pi(k_1 n/X + k_2 m/Y)}, \quad (7)$$

где фильтр-функция $H = H(\tilde{Z}_{k_1, k_2})$ не является линейной функцией, фильтр (7) есть пример нелинейного фильтра.

В зависимости от свойств частотной фильтр-функции различают фильтры низких частот, подавляющие высокие частоты и пропускающие низкие частоты; фильтры высо-

ких частот, подавляющие низкие частоты и пропускающие высокие частоты; идеальные фильтры; гауссовские фильтры и т.д. [4].

4. Пространственные фильтры

Линейные частотные фильтры, основанные на преобразовании спектра Фурье цифрового изображения, близко связаны с линейными пространственными фильтрами, преобразующими прообраз Фурье, т.е. исходное цифровое изображение. Эта связь устанавливается с помощью преобразования свертки. Приведем определение свертки в дискретном случае.

Пусть $h_{n, m}$ – двумерный числовой массив с размерами (5). Свертка цифрового изображения $Z_{n, m}$ с функцией (двумерным массивом) $h_{n, m}$ обозначается $Z_{n, m} * h_{n, m}$ и определяется по формуле

$$Z_{n, m} * h_{n, m} = \sum_{k_1=0}^{X-1} \sum_{k_2=0}^{Y-1} Z_{n, m} h_{n-k_1, m-k_2} \quad (8)$$

Важнейшим свойством свертки является формула

$$\tilde{Z}_{k_1, k_2} \tilde{h}_{k_1, k_2} = \sum_{n=0}^{X-1} \sum_{m=0}^{Y-1} (Z_{n, m} * h_{n, m}) \cdot e^{-i2\pi(k_1 n/X + k_2 m/Y)}, \quad (9)$$

смысл которой заключается в том, что ДПФ свертки двух функций равняется произведению ДПФ этих функций.

Справедлива и обратная формула

$$\tilde{Z}_{k_1, k_2} * \tilde{h}_{k_1, k_2} = \sum_{n=0}^{X-1} \sum_{m=0}^{Y-1} (Z_{n, m} h_{n, m}) \cdot e^{-i2\pi(k_1 n/X + k_2 m/Y)}, \quad (10)$$

утверждающая, что ДПФ произведения двух функций равняется свертке преобразований Фурье этих функций.

Заметим, что формулу (8), относящуюся к конечным дискретным массивам, а также вытекающие из неё формулы (9) и (10), называют формулами для круговой (циклической) свертки, в отличие от термина «свертка», относящегося к бесконечным дискретным массивам, а также к непрерывным функциям.

Заметим также, что свертка является коммутативной операцией.

5. Фильтрация по окрестностям элементов пространственной области

Частотная и пространственная фильтрации, разобранные в разделах 3 и 4, основывались на применении известных заранее функций к спектру цифрового изображения или к исходному цифровому изображению. По этой причине эти фильтрации носят название поэлементных фильтраций [5].

Данный раздел посвящен фильтрации другого типа, а именно, фильтрации в пространственной области, осуществляемой по окрестностям каждого элемента изображения. Для указанного типа пространственной фильтрации используются термины: маска и ядро.

Опишем схему фильтрации по окрестностям, введя маску, например, в виде числовой квадратной матрицы 3-го порядка:

$$C_{3,3} = \begin{pmatrix} c_{-1,-1} & c_{0,-1} & c_{1,-1} \\ c_{-1,0} & c_{0,0} & c_{1,0} \\ c_{-1,1} & c_{0,1} & c_{1,1} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

С этой целью рассмотрим сначала произвольный элемент Z_{n_0, m_0} исходного изображения, номер которого удовлетворяет неравенствам:

$$0 < n_0 < X - 1; \quad 0 < m_0 < Y - 1, \quad (12)$$

и окрестность этого элемента в пространственной области (на плоскости xOy), состоящую из 8 его ближайших соседей элементов изображения. Эта окрестность представляет собой квадратную матрицу 3-го порядка:

$$O_{3,3} = \begin{pmatrix} Z_{n_0-1, m_0-1} & Z_{n_0, m_0-1} & Z_{n_0+1, m_0-1} \\ Z_{n_0-1, m_0} & Z_{n_0, m_0} & Z_{n_0+1, m_0} \\ Z_{n_0-1, m_0+1} & Z_{n_0, m_0+1} & Z_{n_0+1, m_0+1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

При осуществлении фильтрации на основе маски $C_{3,3}$ каждый элемент изображения Z_{n_0, m_0} преобразуется в элемент f_{n_0, m_0} , определяемый с помощью окрестности $O_{3,3}$ по формуле:

$$f_{n_0, m_0} = \sum_{i=-1,0,1} \sum_{j=-1,0,1} c_{i,j} Z_{n_0+i, m_0+j} \quad (14)$$

Элементы f_{n_0, m_0} и являются результатом фильтрации элементов Z_{n_0, m_0} изображения с номерами, удовлетворяющими неравенствам (12).

Если же элемент изображения Z_{n_0, m_0} расположен на горизонтальных или вертикальных границах изображения, т.е. в случае, когда $n_0 = 0, X - 1$, а также в случае, когда $m_0 = 0, Y - 1$, то окрестность $O_{3,3}$ выходит за границы изображения, и для применения маски (11) изображение нужно расширить нулями.

Заметим, что фильтрация изображения, осуществляемая по формулам (11) – (14), является линейной фильтрацией и часто используется для сглаживания изображений. В случае, когда в формуле (11) все элементы $c_{i,j}$ равны $\frac{1}{9}$, результат линейной фильтрации f_{n_0, m_0} , полученный по формуле (14), является средним арифметическим элементов матрицы $O_{3,3}$.

Если бы мы вообще не вводили маску (11), а вместо вычисления значения f_{n_0, m_0} по формуле (14) в качестве значения f_{n_0, m_0} вычисляли, например, максимум, минимум или медиану значений элементов изображения по различным квадратным или прямоугольным окрестностям элемента изображения Z_{n_0, m_0} , то мы бы получили нелинейные фильтры, применяемые для шумоподавления. Также для шумоподавления применяют нелинейные фильтры, в которых в качестве значения f_{n_0, m_0} вычисляются среднее геометрическое, среднее гармоническое и другие средние значения, отличные от среднего арифметического, причем не только по окрестности $O_{3,3}$, но и по квадратным или прямоугольным окрестностям других размеров.

6. Подавление шума при помощи линейной модуляции по окрестностям

Рассмотрим математическую модель фоторегистрации, основанную на предположении о том, что цифровое изображение $Z_{n,m}$ представляет собой сумму

$$Z_{n,m} = u_{n,m} + v_{n,m},$$

в которой значения $u_{n,m}$ являются точными, а $v_{n,m}$ – независимые случайные величины (помеха, шум).

Двумерные массивы $u_{n,m}$ и $z_{n,m}$ часто называют неискаженным и искаженным изображениями соответственно.

Также, как и в разделе 3 настоящей статьи, символом $\tilde{Z}_{k_1,k_2}$ будем обозначать двумерный числовой массив с размерами (4), являющийся образом Фурье цифрового изображения $z_{n,m}$ с размерами (5). Символами H_{k_1,k_2} и $F_{n,m}$ будем обозначать соответственно линейный частотный фильтр и результат частотной фильтрации изображения $z_{n,m}$ в пространственной области, осуществляемой по формуле (6).

Кроме того, обозначим символами $\tilde{U}_{k_1,k_2}$ и $\tilde{V}_{k_1,k_2}$ образы Фурье неискаженного изображения и шума соответственно и будем считать, что мы, эмпирически наблюдая спектр $\tilde{Z}_{k_1,k_2}$ искаженного изображения, с приемлемой точностью можем определить спектр $\tilde{V}_{k_1,k_2}$ шума.

Из формулы (6) вытекает, что изображение шума в пространственной области приближенно можно вычислить по формуле

$$v_{n,m} = \frac{1}{XY} \sum_{k_1=0}^{X-1} \sum_{k_2=0}^{Y-1} \tilde{V}_{k_1,k_2} H_{k_1,k_2} \cdot e^{-i2\pi(k_1 n/X + k_2 m/Y)}, \quad (15)$$

Рассмотрим произвольный элемент u_{n_0,m_0} неискаженного изображения, номер которого удовлетворяет неравенствам (12), и его окрестность в пространственной области, заданную, например, квадратной матрицей 3-го порядка:

$$O = \begin{pmatrix} u_{n_0-1,m_0-1} & u_{n_0,m_0-1} & u_{n_0+1,m_0-1} \\ u_{n_0-1,m_0} & u_{n_0,m_0} & u_{n_0+1,m_0} \\ u_{n_0-1,m_0+1} & u_{n_0,m_0+1} & u_{n_0+1,m_0+1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Введем для окрестности (16) константу M , определяющую линейную модуляцию шума в пространственной области по формуле

$$\hat{u}_{n,m} = u_{n,m} - M v_{n,m}, \quad (17)$$

где символом $\hat{u}_{n,m}$ обозначено приближенное значение $u_{n,m}$. Найдем значение константы M , которое дает минимум дисперсии σ_{n_0,m_0}^2 величины $\hat{u}_{n,m}$ по окрестности

(16). Дисперсия σ_{n_0,m_0}^2 вычисляется по формуле

$$\sigma_{n_0,m_0}^2 = \sum_{i=-1,0,1} \sum_{j=-1,0,1} (\hat{u}_{n_0+i,m_0+j} - \bar{u}_{n_0,m_0})^2, \quad (18)$$

где символом $\bar{u}_{n_0,m_0}$ обозначено среднее значение величины $\hat{u}_{n,m}$, вычисляемое по формуле

$$\bar{u}_{n_0,m_0} = \frac{1}{9} \sum_{i=-1,0,1} \sum_{j=-1,0,1} \hat{u}_{n_0+i,m_0+j} \quad (19)$$

Подставляя выражение (19) в (18), получаем

$$\sigma_{n_0,m_0}^2 = \sum_{i=-1,0,1} \sum_{j=-1,0,1} \left(\hat{u}_{n_0+i,m_0+j} - \frac{1}{9} \sum_{i=-1,0,1} \sum_{j=-1,0,1} \hat{u}_{n_0+i,m_0+j} \right)^2 \quad (20)$$

Для того чтобы константа модуляции M доставляла минимум величине σ_{n_0,m_0}^2 , необходимо, чтобы производная от дисперсии по M равнялась нулю:

$$\frac{d(\sigma_{n_0,m_0}^2)}{dM} = 0, \quad (21)$$

причем из структуры формулы (20) вытекает, что условие (21) также является и достаточным. Вычисляя производную (21), получаем

$$\sum_{i=-1,0,1} \sum_{j=-1,0,1} \left(\hat{u}_{n_0+i,m_0+j} - \frac{1}{9} \sum_{i=-1,0,1} \sum_{j=-1,0,1} \hat{u}_{n_0+i,m_0+j} \right) \cdot \left(-v_{n_0+i,m_0+j} + \frac{1}{9} \sum_{i=-1,0,1} \sum_{j=-1,0,1} v_{n_0+i,m_0+j} \right) = 0,$$

откуда находим значение константы модуляции шума:

$$M = \frac{\overline{u_{n_0, m_0} v_{n_0, m_0}} - \overline{u_{n_0, m_0}} \cdot \overline{v_{n_0, m_0}}}{\overline{v_{n_0, m_0}^2} - \overline{v_{n_0, m_0}}^2},$$

где чертой сверху обозначено среднее значение величины, вычисляемое по формуле (19).

В заключение отметим, что применение для шумоподавления окрестности O , задан-

ной по формуле (16), не является принципиальным, и описанный алгоритм оптимальной линейной модуляции практически без изменений переносится на любые другие квадратные или прямоугольные окрестности пространственной области.

Список литературы

1. Привалов И.И. Ряды Фурье. – М.: Едиториал УРСС, 2018. – 168 с.
2. Фаствидео [Электронный ресурс] / URL: <https://www.fastvideo.ru/> (дата обращения: 12.02.2019 г.).
3. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2012. – 1104 с.
4. Красильников Н.Н. Цифровая обработка 2D- и 3D-изображений. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 608 с.
5. Емельянов С.Г., Мирошниченко С.Ю., Панищев В.С., Титов В.С., Труфанов М.И. Обработка цифровых аэрокосмических изображений для геоинформационных систем. – Белгородская область: ТНТ, 2012. – 176 с.

References

1. Privalov I.I. Rjady Fur'je. – M.: Editorial URSS, 2018. – 168 s.
2. Fastvideo [Elektronnyj resurs] / URL: <https://www.fastvideo.ru/> (data obrashhenija: 12.02.2019 g.);
3. Gonsales R., Vuds R. Cifrovaja obrabotka izobrazhenij. – M.: Tehnosfera, 2012. – 1104 s.
4. Krasil'nikov N.N. Cifrovaja obrabotka 2D- i 3D-izobrazhenij. – SPb.: BHV-Peterburg, 2011. – 608 s.
5. Emel'janov S.G., Miroshnichenko S.Ju., Panishhev V.S., Titov V.S., Trufanov M.I. Obrabotka cifrovyyh aerokosmicheskikh izobrazhenij dlja geoinformacionnyh system. – Belgorodskaja oblast'. : TNT, 2012. – 176 s.