Шабанов Э.В.
Shabanov E.V.

магистрант кафедры
«Вычислительная техника и инженерная
кибернетика»
Уфимский государственный нефтяной
технический университет,
г. Уфа, Российская Федерация

Гиниятуллин В.М.
Giniyatullin V.M.

кандидат технических наук,
доцент кафедры
«Вычислительная техника и инженерная
кибернетика»
Уфимский государственный нефтяной
технический университет,
г. Уфа, Российская Федерация

УДК 004.021

DOI:

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТРИЛАТЕРАЦИЯ

На данный момент основным методом спутниковой навигации является сферическая трилатерация – расчет точки пересечения четырех сфер, центрами которых являются координаты спутников, а радиусами – расстояния от спутников до приемника. Координаты спутников приемник получает из их информационных сигналов, в то время как расстояния до спутников рассчитываются как разницы времен отправления и приема сигнала.

Основной проблемой данного метода является сложность синхронизации часов спутников и приемника, поскольку точность используемых часов сильно различается (на спутниках стоят атомные часы, а в приемниках, обычно, кварцевые). В результате рассинхронизации часов спутников и приемника может возникнуть ошибка в определении координат. Эту ошибку можно минимизировать, используя более точные часы в приемнике, но данный способ сложен в реализации и экономически не выгоден. Вместо этого для корректировки ошибки в систему уравнений сферической трилатерации добавляется дополнительное уравнение, а ошибка вычисляется как четвертая переменная в данной системе. При этом необходимы данные с дополнительного спутника.

Система уравнений алгоритма сферической трилатерации решается итерационным численным методом. В данной работе рассматривается гиперболическая трилатерация – альтернативный алгоритм, использующий аналитические методы и не требующий синхронизации часов спутников и приемника.

Рассмотрены приложения спутниковой навигации, требующие повышенной точности спутникового позиционирования. Рассмотрены программно-определяемые радиосистемы, а также программная реализация спутникового приемника, основанная на программно-определяемой радиосистеме. Описан принцип функционирования, а также недостатки используемого в большинстве пользовательских устройств алгоритма сферической трилатерации. Описан метод гиперболической трилатерации, а также переход от уравнений гиперболической трилатерации к полным квадратичным формам. Разработан альтернативный алгоритм спутниковой навигации – гиперболическая трилатерация. Проведено его сравнение с алгоритмом сферической трилатерации, проанализированы отличия результатов

работы разработанного алгоритма гиперболической трилатерации от алгоритма сферической трилатерации. Проанализирована причина большего разброса алгоритма гиперболической трилатерации, приведено решение, понижающее разброс результатов гиперболической трилатерации до уровня сферической трилатерации. Определены задачи дальнейших исследований.

Ключевые слова: спутниковая навигация, GPS, ГЛОНАСС, трилатерация, коника, псевдорасстояние, точность, гиперболоид, аналитический метод, числа произвольной размерности.

DIFFERENTIAL HYPERBOLIC TRILATERAL

Now the main satellite navigation algorithm is spherical trilateration. Spherical trilateration is calculation of four spheres intersection. Centers of the spheres are satellite coordinates. Their radiuses are distances between satellites and receiver. Receiver gets satellites coordinates from their information signals. The distances are calculated as differences between receive time and transmit time multiplied by the speed of light.

The main issue of spherical trilateration is difficulty of satellite and receiver clocks synchronization (precision is different because of different types of clocks). Dyssynchronization may cause a position fix error. This error may be reduced when more precise receiver clocks are used but precise receiver clocks are expensive and difficult to implement. Another method to reduce the error is to add a fourth equation in system and calculate the error as a fourth variable. This method requires data from additional satellite.

Spherical trilateration equation system is solved by numerical method. In this article another method is considered – hyperbolic trilateration. The method is analytical and does not require satellite receiver clock synchronization.

Applications of satellite navigation that require improved accuracy of satellite positioning are considered. The software-defined radio systems are considered, as well as the software implementation of a satellite receiver based on a software-defined radio system. The principle of functioning and disadvantages of common used spherical trilateration algorithm are considered. The method of hyperbolic trilateration is described, as well as the transition from the hyperbolic trilateration equations to the quadratic forms. An alternative algorithm for satellite navigation is developed – the hyperbolic trilateration. The algorithm is compared to the spherical trilateration algorithm and the differences of the results of developed algorithm and the spherical trilateration algorithm are analyzed. The reason for the larger scatter of the hyperbolic trilateration algorithm is analyzed, a solution that reduces the scatter of the results of hyperbolic trilateration algorithm to the level of spherical trilateration is given. The objectives of further research are defined.

Key words: satellite navigation, trilateration, GPS, GLONASS, conic, pseudorange, precision, hyperboloid, analytic method, variable precision numbers.

Алгоритмы сферической трилатерации

На данный момент для расчета навигационного решения используется алгоритм сферической трилатерации. Его входными данными являются псевдодальности от приемника до спутников и координаты соответствующих спутников. Алгоритм выглядит следующим образом:

- для каждого из четырех спутников строится уравнение сферы с центром в этом спутнике и радиусом, равным его псевдодальности [1];

- ко всем уравнениям добавляется переменная, представляющая собой общую погрешность расчета псевдодальностей до спутников;

- полученная система решается итерационным методом [2].

В результате определяется навигационное решение и общая ошибка расчета псевдодальностей.

На рисунке 1 приведен принцип определения координат алгоритмом сферической трилатерации.

Рисунок 1. Определение координат сферической трилатерацией

Система уравнений, соответствующая данному алгоритму:

$$\begin{cases} \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2} + e = R_A \\ \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + (z - z_B)^2} + e = R_B \\ \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2} + e = R_C \\ \sqrt{(x - x_D)^2 + (y - y_D)^2 + (z - z_D)^2} + e = R_D \end{cases} \quad (1)$$

где x, y, z – искомые координаты;

x_i, y_i, z_i – координаты i -го спутника;

R_i – расстояние до i -го спутника;

e – общая для всех спутников ошибка определения расстояний.

В случае определения координат объекта, для которого точно известно, что он находится на поверхности земли, четвертое уравнение системы можно опустить и вместо него использовать уравнение сферического приближения земной поверхности [3] либо, используя всего три уравнения, выбрать из двух корней тот, что находится на поверхности земли. При этом необходимо обеспечивать синхронизацию часов спутников и приемника, поскольку четвертое уравнение позволяет вычислять разность хода часов на спутниках и приемнике и вносить соответствующие корректировки в часы приемника.

Переход от сфер к гиперболам

Гиперболической навигацией обычно называют навигационные системы, основанные на измерении разниц времени приема двух сигналов без необходимости в синхронизации часов приемника и устройства, передающего сигнал [4]. Для гиперболической навигации на плоскости распределение разниц времен прибытия сигнала с двух передающих устройств представляет гиперболу.

Два таких измерения позволяют построить две гиперболы, пересекающиеся в двух точках. Построение третьей гиперболы позволяет определить точное местоположение приемника.

В статье [4] приведен метод определения координат приемника, не требующий синхронизации часов приемника и спутников. Метод использует разности расстояний от спутников до приемника и сводится к решению следующей системы уравнений:

$$R_A = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2} \quad (2)$$

$$R_B = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + (z - z_B)^2} \quad (3)$$

$$R_C = \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2} \quad (4)$$

$$R_D = \sqrt{(x - x_D)^2 + (y - y_D)^2 + (z - z_D)^2} \quad (5)$$

$$R_{AB} = R_A - R_B \quad (6)$$

$$R_{AC} = R_A - R_C \quad (7)$$

$$R_{AD} = R_A - R_D \quad (8)$$

$$R_{BC} = R_B - R_C \quad (9)$$

$$R_{BD} = R_B - R_D \quad (10)$$

где x, y – координаты приемника;

x_i, y_i – координаты i -го спутника;

R_i – расстояние от i -го спутника до приемника;

R_{ij} – разница расстояний от i -го спутника до приемника и j -го спутника до приемника.

С помощью математических преобразований уравнения данной системы можно свести к полным квадратичным формам (ПКФ). Преобразование приведено в статье [5].

Полученные уравнения являются ПКФ трехмерных поверхностей и в общем виде выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} &A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + \\ &+ 2A_{13}xz + 2A_{23}yz + 2A_{14}x + \\ &+ 2A_{24}y + 2A_{34}z + A_{44} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Имея данные о 4 спутниках, можно составить 6 ПКФ вида (11). Расчет коэффициентов одной из ПКФ (для спутников А и В) приведен ниже:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \left(\frac{x_B - x_A}{R_{AB}} \right)^2 - 1, + \\
A_{22} &= \left(\frac{y_B - y_A}{R_{AB}} \right)^2 - 1, \\
A_{33} &= \left(\frac{z_B - z_A}{R_{AB}} \right)^2 - 1, \\
A_{12} &= \left(\frac{x_B - x_A}{R_{AB}} \right) \left(\frac{y_B - y_A}{R_{AB}} \right), \\
A_{13} &= \left(\frac{x_B - x_A}{R_{AB}} \right) \left(\frac{z_B - z_A}{R_{AB}} \right), \\
A_{23} &= \left(\frac{y_B - y_A}{R_{AB}} \right) \left(\frac{z_B - z_A}{R_{AB}} \right), \\
A_{14} &= \left(\frac{x_B - x_A}{R_{AB}} \right) \left(\frac{x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2 + z_A^2 - z_B^2 - R_{AB}^2}{2R_{AB}} \right) + x_B, \\
A_{24} &= \left(\frac{y_B - y_A}{R_{AB}} \right) \left(\frac{x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2 + z_A^2 - z_B^2 - R_{AB}^2}{2R_{AB}} \right) + y_B, \\
A_{34} &= \left(\frac{z_B - z_A}{R_{AB}} \right) \left(\frac{x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2 + z_A^2 - z_B^2 - R_{AB}^2}{2R_{AB}} \right) + z_B, \\
A_{44} &= \left(\frac{x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2 + z_A^2 - z_B^2 - R_{AB}^2}{2R_{AB}} \right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Геометрическим представлением уравнений данной системы являются гиперboloиды. Точкой пересечения пяти таких гиперboloидов являются координаты приемника [5].

Алгоритм гиперболической трилатерации

Алгоритм спутниковой навигации, использующий системы уравнений (11), выглядит следующим образом:

- 1) получить 5 трехмерных ПКФ;
- 2) подставив в 4 трехмерные ПКФ начальное приближение Z , получить 4 двумерные ПКФ;
- 3) используя алгоритм расчета точек пересечения коник [6], получить по 4 точки пересечения для каждой из 6 пар коник;
- 4) выбрать из каждой пары по точке таким образом, чтобы точки минимально отличались друг от друга;
- 5) посчитать грубые X , Y как среднее полученных в 4 пункте точек;
- 6) подставить X , Y из 5 пункта в 5 трехмерную ПКФ из пункта 1, получить квадратное уравнение;
- 7) решить квадратное уравнение, выбрать корень, минимально отличающийся от Z ;
- 8) выполнить пункты 2 – 5, в пункте 2 подставив Z из пункта 7.

В результате X , Y , Z становятся равны координатам приемника.

Числовой пример выполнения алгоритма приведен в [7].

Результаты работы алгоритма представлены на рисунке 2. Большой круг здесь – координаты приемника (радиус – погрешность), квадраты – результаты работы сферической трилатерации, треугольники – результаты работы гиперболической трилатерации. На графике видно, что результаты гиперболической трилатерации расположены менее кучно, чем результаты сферической трилатерации.

Рисунок 2. Результаты работы программы

Повышение точности алгоритма

Поскольку навигационные спутники находятся на значительном удалении от поверхности Земли, в алгоритмах обработки спутниковых данных встречаются сравнительно большие числа. Числа в памяти обычно представляются либо в виде числа с фиксированной запятой, либо в виде числа с плавающей запятой. При этом числа с плавающей запятой представляются в виде трех чисел, в которые записываются знак, мантисса и экспонента числа. Размерность мантиссы чисел типа double равна [8] 52 бита. При такой размерности ошибки вычислений начнут происходить при числах больше 1015 [9].

Для обеспечения большей точности необходимо использовать библиотеку работы с числами произвольной размерности. В данной работе используется GNU Multiple Precision Arithmetic Library (GMP). GMP

является свободной библиотекой арифметики с числами произвольной размерности. Она работает со знаковыми целыми числами, числами с фиксированной запятой и числами с плавающей запятой. Максимальная размерность чисел при этом ограничена только памятью оборудования, на котором работает библиотека. Помимо основных арифметических действий в GMP реализовано большое количество функций, таких как экспонента, тригонометрические функции, вычисление квадратного корня и т.д. [10].

В ходе повышения точности с 52 до 58 бит с шагом в 2 бита было обнаружено, что разброс результатов гиперболической трилатерации становится равным разбросу результатов сферической трилатерации при размерности чисел, равной 58 бит. Повышение точности показано на рисунке 3.

Рисунок 3. Повышение разрядности с 52 до 58 бит с шагом в 2 бита

Вывод

Подобрано и модифицировано для работы с алгоритмом гиперболической трилатерации свободное ПО GNSS-SDR, реализующее программно-определяемый спутниковый приемник.

С помощью программно-определяемой радиосистемы получены тестовые данные, необходимые для сравнения алгоритмов.

Разработан и реализован алгоритм гиперболической трилатерации, использующий в качестве начального приближения данные GNSS-SDR.

Проведено сравнение результатов работы GNSS-SDR без дополнительной обработки гиперболической трилатерацией и с ней. В результате показано, что гиперболическая

трилатерация точнее приблизительно на 15-20 метров при точности сферической трилатерации, равной 80 метрам, а гиперболической – 60 метрам.

Проанализирован разброс результатов гиперболической трилатерации и найдено решение, уменьшающее разброс результатов гиперболической трилатерации.

Задачами последующих исследований являются:

- подбор первоначального приближения, не зависящего от результатов сферической трилатерации;
- аппаратная реализация спутникового приемника, использующего алгоритм гиперболической трилатерации.

Список литературы

1. Хрусталеv Д. GPS – взгляд изнутри. Спутниковая навигация и принципы построения приемников GPS и ГЛОНАСС // Компоненты и Технологии. – 2001. - № 6. – С. 118-120.
2. Конин В.В. Спутниковые системы и технологии. – Киев: Национальный авиационный университет, 2000. – 245 с.
3. Яценков В.С. Основы спутниковой навигации. – М.: Горячая линия – Телеком, 2005. – 272 с.
4. Егoшин А.В., Моторов М.Н. Определение координат систем радионавигации GPS и ГЛОНАСС на основе измерения времени прихода сигналов со спутника // Программные системы и вычислительные методы. – 2014. - № 2 (7). – С. 217-227.
5. Гиниятуллин В.М., Шабанов Э.В. К вопросу о получении полных квадратичных форм для приложений спутниковой навигации // Актуальные проблемы науки и техники: Материалы IX Международной научно-практической конференции молодых ученых. – Уфа, 2016. – С. 273-275.
6. Арсланов И.Г., Богданова П.Д., Гиниятуллин В.М. Классификация взаиморасположений двух коник: монография. – Саарбрюккен: LAPLAMBERT Academic Publishing, 2014. – 132 с.
7. Гиниятуллин В.М., Шабанов Э.В. Гиперболическая трилатерация // Актуальные проблемы науки и техники: Материалы X

Международной научно-практической конференции молодых ученых. – Уфа, 2017. – С. 220-224.

8. IEEE 754 — стандарт двоичной арифметики с плавающей точкой. URL: <http://www.softelectro.ru/ieee754.html> (дата обращения: 02.12.2017).

9. Хэзфилд Р., Кирби Л. Искусство программирования на С. Фундаментальные алгоритмы, структуры данных и примеры приложений. Энциклопедия программиста. Киев: ДиаСофт, 2001. – 736 с.

10. The GNU MP Bignum Library. URL: <https://gmplib.org> (дата обращения: 02.12.2017).

References

1. Hrustalev D. GPS – the view from the inside. Satellite navigation and principles of construction of receivers GPS and GLONASS // Components and Technologies. – 2001. – no. 6. – p. 118-120.
2. Konin V.V. Satellite systems and technologies. – Kyiv: National Aviation University, 2000. – 245 p.
3. Jacenkov V.S. Basics of satellite navigation. – M.: Hot line – Telecom. 2005. – 272 p.
4. Egoshin A.V., Motorov M.N. Determination of coordinates of GPS and GLONASS radio navigation systems based on satellite signal arrival time measurement // Software systems and computational methods. – 2014. – no. 2 (7). – p. 217-227.

5. Giniyatullin V.M., Shabanov Je.V. On the question of obtaining complete quadratic forms for satellite navigation applications // Actual problems of science and technology: Proceedings of the IX International scientific and practical conference of young scientists. – Ufa, 2016. – p. 273-275.
6. Arslanov I.G., Bogdanova P.D., Giniyatullin V.M. Classification of the relative positions of two conics: a monograph. – Saarbrücken: LAPLAMBERT Academic Publishing, 2014. – 132 p.
7. Giniyatullin V.M., Shabanov E.V. Hyperbolic trilateration // Actual problems of science and technology: Proceedings of the X International scientific and practical conference of young scientists. – Ufa, 2017. – p. 220-224.
8. IEEE 754 — binary floating-point arithmetic standard. URL <http://www.softelectro.ru/ieee754.html> (accessed: 02.12.2017).
9. Hjezfeld R., Kirby L. The art of computer programming. Fundamental algorithms, data structures and application examples. Encyclopedia of programmers. – Kyiv: DiaSoft, 2001. – 736 p.
10. The GNU MP Bignum Library. Available at: <https://gmplib.org> (accessed: 02.12.2017).